المحاضرة 11 2020/11/19

مثال: أثبت أن: $\frac{Z}{4Z}$ تشكل زمرة تبديلية $(\frac{Z}{4Z}, +)$.

طريقة كيلي. $\frac{Z}{4Z} = \{\bar 0, \bar 1, \bar 2, \bar 3\}$

+	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$
$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$
$\bar 1$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 0$
$\bar 2$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 0$	$\bar 1$
$\bar 3$	$\bar 3$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$

- إن + تجميعي لأنه [illegible]
- كذلك $\bar 0$ حيادي بـ + وضوحاً من الجدول
- إن الجدول متناظر بالنسبة للقطر الرئيسي إذاً + تبديلي
- $\bar 0$ نظيره $\bar 0$ وينتمي إلى $\frac{Z}{4Z}$
- $\bar 1$ نظيره $\bar 3$ وينتمي إلى $\frac{Z}{4Z}$
- $\bar 2$ نظيره $\bar 2$ وينتمي إلى $\frac{Z}{4Z}$
- $\bar 3$ نظيره $\bar 1$ وينتمي إلى $\frac{Z}{4Z}$

نستنتج أن $(\frac{Z}{4Z}, +)$ زمرة تبديلية.

الزمرة الضربية U_n

حيث $n \in N^*/\{1\}$

نرمز للمجموعة التالية $\{\bar a \in \frac{Z}{nZ} : gcd(a,n) = 1\}$ بالرمز $U(n)$

ونزود هذه المجموعة بقانون تشكيل داخلي (.) المعرف بالشكل
$\bar a . \bar b = \overline{a . b} \in \frac{Z}{nZ}$

إن $(U(n), .)$ تشكل زمرة تبديلية.

مثال: أثبت أن $(U(10), .)$ تشكل زمرة تبديلية.

الحل:

$U(10) = \{\bar 1, \bar 3, \bar 7, \bar 9\}$

.	$\bar 1$	$\bar 3$	$\bar 7$	$\bar 9$
$\bar 1$	$\bar 1$	$\bar 3$	$\bar 7$	$\bar 9$
$\bar 3$	$\bar 3$	$\bar 9$	$\bar 1$	$\bar 7$
$\bar 7$	$\bar 7$	$\bar 1$	$\bar 9$	$\bar 3$
$\bar 9$	$\bar 9$	$\bar 7$	$\bar 3$	$\bar 1$

0, 10, 20, 30, 40, 50, 60

$27 = 9 \times 3$

- نلاحظ أن القانون (.) قانون تشكيل داخلي
- (.) تجميعي وذلك لأن:

$(\bar a . \bar b) . \bar c = \overline{a . b} . \bar c = \overline{(a . b) . c} = \overline{a . (b . c)}$

الضرب تجميعي في Z

$= \bar a (\overline{b . c})$

$= \bar a (\bar b . \bar c)$

- (.) تبديلي

$\bar a . \bar b = \overline{a . b} = \overline{b . a} = \bar b . \bar a$

لأن . تبديلي في Z

- 1 حيادي $(U(10), .)$ وضوحاً من الجدول:

إن نظير $\bar 1$ هو $1 \in U(10)$

إن نظير $\bar 3$ هو $7 \in U(10)$

إن نظير $\bar 7$ هو $3 \in U(10)$

إن نظير 9 هو $9 \in U(10)$

مثال:

$U(7) = \{\bar 1, \bar 2, \bar 3, \bar 4, \bar 5, \bar 6\}$

	.	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 5$	$\bar 6$
7							
14	$\bar 1$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 5$	$\bar 6$
21, 28	$\bar 2$	$\bar 2$	$\bar 4$	$\bar 6$	$\bar 1$	$\bar 3$	$\bar 5$
35	$\bar 3$	$\bar 3$	$\bar 6$	$\bar 2$	$\bar 5$	$\bar 1$	$\bar 4$
42, 49	$\bar 4$	$\bar 4$	$\bar 1$	$\bar 5$	$\bar 2$	$\bar 6$	$\bar 3$
	$\bar 5$	$\bar 5$	$\bar 3$	$\bar 1$	$\bar 6$	$\bar 4$	$\bar 2$
	$\bar 6$	$\bar 6$	$\bar 5$	$\bar 4$	$\bar 3$	$\bar 2$	$\bar 1$

- تبديلي

$\bar a . \bar b = \overline{a . b} = \overline{b . a} = \bar b . \bar a$

لأن . تبديلي في Z

- $\bar 1$ حيادي $(U(7), .)$ وضوحاً من الجدول.
- إن نظير $\bar 1$ هو $\bar 1 \in U(7)$
  - إن نظير $\bar 2$ هو $\bar 4 \in U(7)$
  - إن نظير $\bar 3$ هو $\bar 5 \in U(7)$
  - إن نظير $\bar 4$ هو $\bar 2 \in U(7)$
  - إن نظير $\bar 5$ هو $\bar 3 \in U(7)$
  - إن نظير $\bar 6$ هو $\bar 6 \in U(7)$

انتهت المحاضرة